

粗粒土的分数阶应变率及其与分形维度的关系

孙逸飞¹, 沈 扬¹, 刘汉龙²

(1. 河海大学 教育部岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 南京 210098; 2. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400044)

摘 要: 在波浪荷载、潮汐作用下砂土等粗粒土常常经受长期动力变形。运用分数阶微积分理论, 分析了 5 种不同粗粒土在不同加载条件下的累积变形特性及粗粒土的分数阶应变率, 传统的整数阶应变率随着加载次数的变化而变化, 而粗粒土的分数阶应变率在同一加载条件下保持为常数。通过粗粒土颗粒破碎的分形理论, 尝试建立分数阶应变率与土颗粒分布的分形维度之间的关系, 分析土体分形维度对分数阶应变率大小的影响, 发现随着分形维度的增加, 分数阶应变率的数值降低。

关 键 词: 粗粒料; 分数阶微积分; 边界面; 临界状态; 本构模型

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2018) 增 1-0297-07

Fractional strain rate and its relation with fractal dimension of granular soils

SUN Yi-fei¹, SHEN Yang¹, LIU Han-long²

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China;

2. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Due to the wave-load and tidal load, granular soils, such as sand, often suffers from long-term cyclic deformation. Cumulative strains of five different granular soils under different loading conditions are analyzed by using the fractional calculus, and its there exists a fractional strain rate for granular soils subjected to repeated loads. Unlike the traditional integral strain rate which is varying with the load cycles, the fractional strain rate remains constant for a given loading condition. To investigate the physical origin of the fractional approach, fractal breakage theory of granular soils is used. It is found that the fractional strain rate has a strong connection with the corresponding fractal dimension of a given granular soil. It decreases with the increase of the fractal dimension.

Keywords: granular aggregates; fractional calculus; bounding surface; critical state; constitutive model

1 引 言

粗粒料作为一种填料常常被用于诸如港口、岛礁、大坝等工程的建设中, 由于波浪荷载、水库蓄水放水等影响, 海洋、水利等工程中的粗粒填土会经受动力作用^[1-3], 研究动力荷载作用下粗粒土的工程特性至关重要。许多学者^[3-7]对粗粒土在循环荷载、主应力轴旋转等荷载作用下的应力、应变特性进行了深入地研究, 陈生水等^[1]研究了循环荷载作用下堆石料的变形-动强度特性, 发现堆石料的累积变形随着振次的增加而迅速增加, 最后趋于稳定。王磊等^[5]研究了砂土在循环荷载作用下的累积变形规律, 认为累积应变与振次成幂律关系。沈扬等^[3]对饱和粉土在主应力轴旋转荷载作用下的变形-液

化特性进行了研究, 发现孔压与加载次数密切相关, 随着加载次数的增加而最终达到液化崩塌状态。

Indraratna 等^[7]对不同初始级配的道砟材料在循环荷载作用下的长期变形进行了研究, 发现其长期变形随着振次呈现幂律增长, 试样中的颗粒破碎程度随着加载进行而增加。但是, 对试样在循环荷载作用下的应变率及其影响因素却少有深入研究, 张季如等^[8]对土体在加载过程中的颗粒破碎及其分布规律进行了研究, 认为颗粒破碎后的粗粒土级配遵循分形分布规律。粗粒土的压缩变形和剪切强度均伴随颗粒破碎^[9], 其初始级配对后期变形有深远影响。

为定量地描述土体在静动力荷载作用下的变形特性, 分数阶微积分理论被广泛应用, 如殷德顺等^[10]和何明明等^[11]分别运用分数阶微积分理论对

收稿日期: 2017-05-18

基金项目: 中央高校基本科研业务费 (No. 2017B05214); 博士后面上基金项目 (No. 2017M621607)。

This work was supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities(2017B05214) and the Research Funds from China Postdoctoral Science Foundation(2017M621607).

第一作者简介: 孙逸飞, 男, 1988 年生, 博士, 副教授, 主要从事粗粒土静动力学特性及本构模型研究。E-mail: sunny@hhu.edu.au

土体单调加载情况下的变形进行了建模。Sun 等^[12]基于分数阶应变增量假设,建立了适合粗粒土的循环荷载模型,但并没有对分数阶应变增量的假设进行充分的试验论证。

分数阶微积分常常被经验性的用于土体的本构模型的建立中,分数阶导数的意义,即其与土体物理性状的关系是什么?尚不清楚。本文对几种不同的粗粒土在循环荷载作用下的应变率进行了研究,进一步验证粗粒土在循环荷载作用下的分数阶应变率,并运用土体的分形破碎理论^[13]对分数阶数与土颗粒分布的分形维度的关系进行研究,认为分数阶数与土体的分形维度存在定量关系。本文研究可为后期建立土体在长期荷载作用下预测模型进行铺垫。

2 分数阶应变率

2.1 分数阶微积分定义

分数阶微积分是传统整数阶微积分的延伸,不同于整数阶微积分,分数阶微分和积分的定义均采用积分形式,本文采用 Riemann-Liouville 的定义形式^[14]:

分数阶微分为

$${}_0D_x^\alpha z(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{z(\tau) d\tau}{(x-\tau)^\alpha}, \quad (x > 0) \quad (1)$$

分数阶积分为

$${}_0I_x^\alpha z(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{z(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}, \quad (x > 0) \quad (2)$$

式中: α 为分数阶数; D 、 I 分别为求微分和求积分符号。由式 (1)、(2) 可知,分数阶微积分具有长程记忆性,理论上更加适用于描述循环加载等路径和记忆依赖性行为。

2.2 分数阶应变增量

进行循环三轴试验时塑性应变在每一个加卸载过程中累积,为研究这一累积过程,本文选取 5 个不同文献中不同加载条件下粗粒土的三轴试验数据,对其每一个加卸载过程中的应变增量与循环次数的关系进行分析,各土样的物理特性及受荷条件见表 1。

图 1 为高 200 mm、直径为 100 mm 的砂土试样^[15]在三轴排水剪切条件下剪应变增量随加载圈数的变化规律。试样受 200 kPa 的相同平均有效主应力 p'_{av} :

$$p'_{av} = (p'_{min} + p'_{max}) / 2 \quad (3)$$

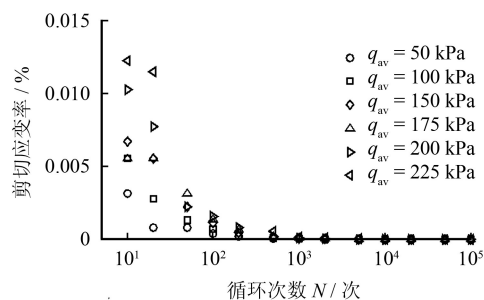
式中: p'_{min} 、 p'_{max} 分别为别最小和最大平均有效主应

力。试样受不同平均偏应力 $q_{av} = (q_{min} + q_{max}) / 2$, q_{min} 、 q_{max} 分别为最小、最大偏应力。

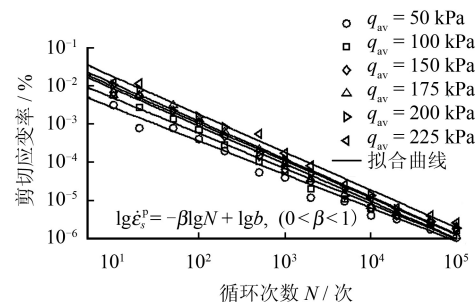
表 1 土样的物理特性及受荷频率

Table 1 Physical property and load frequency of samples

土样	不均匀系数	最大粒径 d_M /mm	平均粒径 /mm	加载频率 /Hz
砂土 ^[15]	1.9	0.6	0.35	1
道砟 ^[16]	1.5	53	38	20
道砟 ^[7]	1.9	45	35	20
底砟 ^[17]	3.3	20	0.78	1
道砟 ^[17]	1.6	38	25	1
碎石 ^[18]	1.6	19	11	1
	1.6	38	22	1



(a) 线性对数坐标



(b) 双对数坐标

图 1 砂土^[15]剪应变率随循环次数的变化

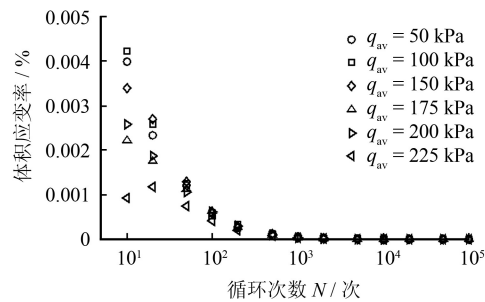
Fig.1 Shear strain accumulation rate varies with number of load cycles for sand^[15]

分析图 1(a)线性对数坐标中的关系曲线可知,加载初始阶段应变增长速率最快,随着加载的进行,应变增长率逐渐减小,趋于稳定;随着平均偏应力的增加,试样在相同振次时的应变率逐渐增加。进一步将图 1(a)中的数据转换到双对数坐标下如图 1(b)所示,应变随着加载次数的增加呈现出线性演变状态。类似的幂律关系同样存在于体积应变的增长中,如图 2 所示。应变率与加载次数之间的幂律关系公式为

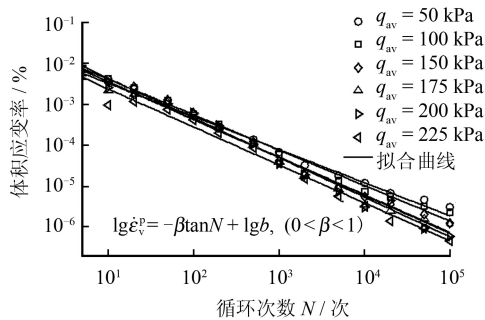
$$\lg \dot{\epsilon} = -\beta \lg N + \lg b \quad (4)$$

式中: β 为图 1、2 中直线的斜率; b 为材料参数,与材料所受应力状态和材料属性有关,其具体影响见本文章节 3; $\dot{\epsilon}$ 为应变率在尺度 N 下有尺寸不变的特性。

图 3 为道砟^[7]的轴向应变累积率随加载次数的变化关系。试验采用直径为 300 mm、高 600 mm 的三轴试样, 在排水条件下采用相同的平均偏应力 (137.5 kPa) 但不同围压 σ'_3 的循环加载条件。同样, 道砟的轴向应变率在双对数坐标下呈现快速降低逐渐趋于稳定。将其在双对数空间展开, 轴向应变率随着加载次数呈线性变化。围压越高, 相同加载次数下的应变率越小。

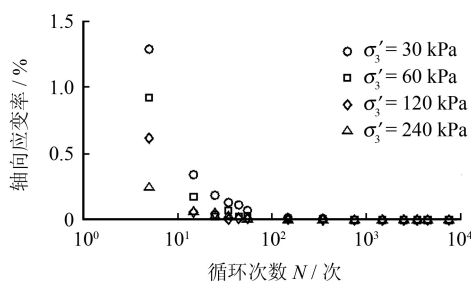


(a) 线性对数坐标

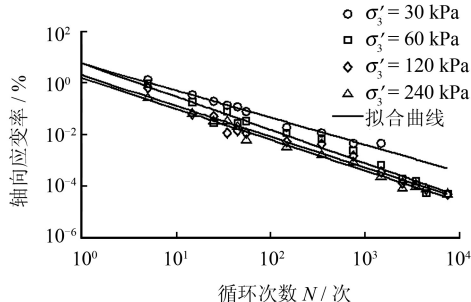


(b) 双对数坐标

图 2 砂土^[15]体积应变率随循环次数的变化
Fig.2 Volumetric strain accumulation rate varies with number of load cycles for sand^[15]



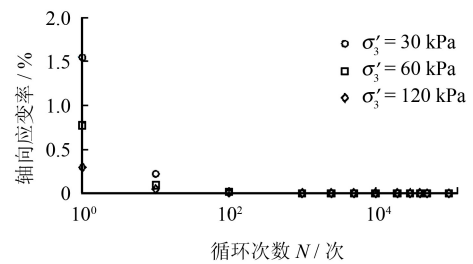
(a) 线性对数坐标



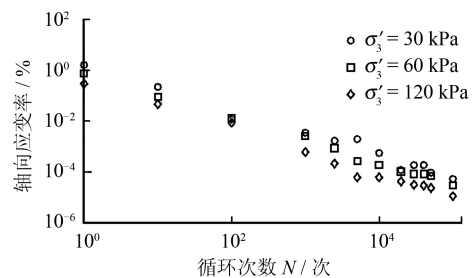
(b) 双对数坐标

图 3 道砟^[16]轴向应变率随循环次数的变化
Fig.3 Axial strain accumulation rate varies with number of load cycles for ballast^[16]

图 4、5 为道砟^[7]轴向应变累积率以及体积应变累积率随加载次数的变化关系, 所采用试验条件与文献[16]类似, 这里不再赘述。在双对数坐标下应变率呈现线性演变的规律。由于低围压 (30 kPa) 下试样在剪切过程中发生径向膨胀^[7], 其体积应变率初始阶段较小, 随着加载的进行其逐渐高于高围压 (120 kPa)。

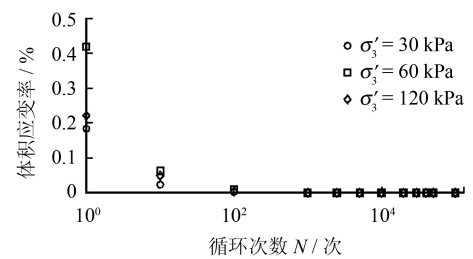


(a) 线性对数坐标

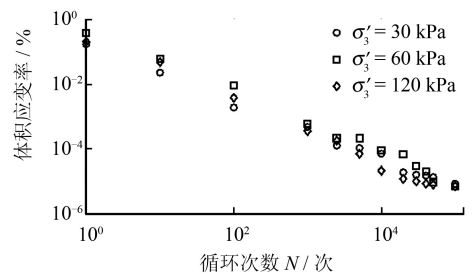


(b) 双对数坐标

图 4 道砟^[7]轴向应变率随循环次数的变化
Fig.4 Axial strain accumulation rate varies with number of load cycles for ballast^[7]



(a) 线性对数坐标



(b) 双对数坐标

图 5 道砟^[7]体积应变率随循环次数的变化
Fig.5 Volumetric strain accumulation rate varies with number of load cycles for ballast^[7]

图 6、7 为不同粒径道砟、碎石^[17-18]的剪应变、体积应变累积率随加载次数的变化关系。在相同加

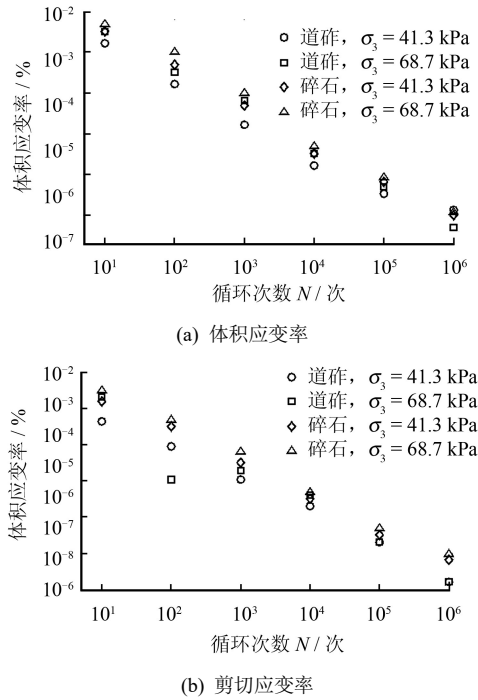


图6 道砟和底砟^[17]体积应变率随循环次数的变化
Fig.6 Strain accumulation rate varies with number of load cycles for ballast and subballast^[17]

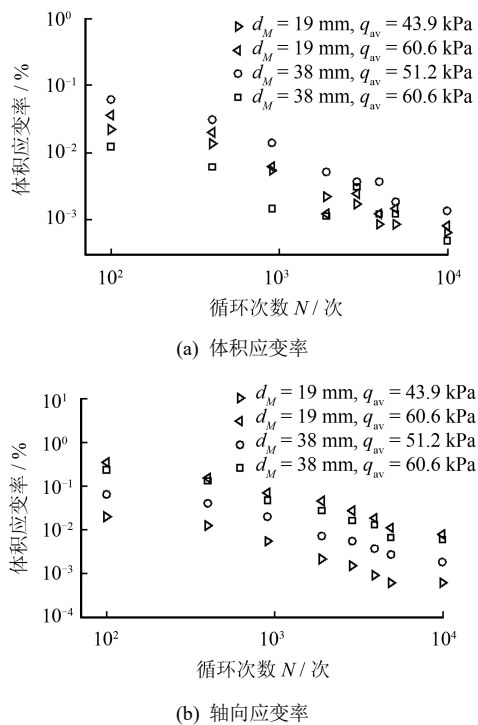


图7 碎石^[18]体积应变率随循环次数的变化
Fig.7 Strain accumulation rate varies with number of load cycles for crushed rock^[18]

载条件下粒径较小的试样(底砟)其应变率高于粒径较大的试样。在双对数坐标下呈现线性演变的规律,进一步运用式(2)对式(4)进行微积分变换,得到如下的分数阶应变增量:

$${}_1D_N^\alpha \varepsilon = b\Gamma(\alpha) \quad (5)$$

式中: $\alpha = 1 - \beta$, 为分数阶应变累积率的阶数, α

越大,土体的变形能力越强^[10, 12]。由式(5)可知,不同于传统整数阶的应变率,当采用分数阶应变率的时候,其应变率为常量,大小仅与受循环荷载的条件有关。下面运用 McDowell 等^[13]的分形破碎理论研究分数阶数与粗粒土的分形维度的关系,以揭示分数阶应变率的物理力学意义。

3 分数阶应变率与分形维度的关系

3.1 粗粒土的分形破碎

粗粒土在受荷过程中内部颗粒会发生滑动、旋转以及破碎,张季如等^[8]和 Coop 等^[19]在砂土的试验研究中发现,加载过程中的颗粒破碎符合分形规律。根据 McDowell 等^[13]试样内部颗粒粒径 d 大于 l_s 的颗粒数量 N_s 符合下列幂律关系:

$$N_s(d > l_s) = Al_s^{-\Delta_s} \quad (6)$$

式中: A 为材料常数; Δ_s 为试样颗粒分布的分形维度。此时试样内部颗粒的比表面积增量 $\dot{S}_s$ 可以表示为

$$\dot{S}_s = \pi l_s^2 \gamma_s \dot{N}_s = A \Delta_s \gamma_s \pi l_s^{1-\Delta_s} \dot{l}_s \quad (7)$$

式中: γ_s 为粗粒土颗粒的形状参数,颗粒越趋近于球形, γ_s 越趋近于 1。当颗粒破碎随着加载的进行不断产生时, l_{s0} 为试样内部颗粒的最小粒径会不断地减小,这里假定每次加卸载过程 l_{s0} 减小 k 倍。试样在多次 N 循环荷载后的比表面积增量为

$$\dot{S}_s = \pi l_s^2 \gamma_s \dot{N}_s = A \Delta_s \gamma_s \pi k^{A_s-3} l_{s0}^{2-\Delta_s} \frac{\partial k}{\partial N} \quad (8)$$

3.2 粗粒土分数阶应变率与分形维度

为了考虑土体在加载过程中颗粒破碎对应力应变关系的影响, Ueng 等^[20]提出了考虑颗粒破碎耗能及颗粒剪胀的能量方程:

$$p' \dot{\varepsilon}_v^p + q \dot{\varepsilon}_s^p = Mp' \dot{\varepsilon}_s^p + \frac{2q-3p'}{9} M \dot{\varepsilon}_v^p + \frac{(3-M)(6+4M)}{3(6+M)} \Omega \dot{S}_s \quad (9)$$

式中:

$$p' = (\sigma'_1 + 2\sigma'_3)/3; \quad q = \sigma'_1 - \sigma'_3 \quad (10)$$

σ'_1 为第一主应力;

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_v^p &= \varepsilon_1^p + 2\varepsilon_3^p \\ \varepsilon_s^p &= 2(\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p)/3 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: ε_1^p 、 ε_3^p 分别为第一、三主应变; M 为临界状态摩擦系数; Ω 为颗粒表面能。为方便分析,将式(8)代入到式(9),并退化到等压压缩状态:

$$p' \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{(3-M)(6+4M)}{(6+M)(3+M)} \Omega A \Delta_s \gamma_s \pi l_s^{1-\Delta_s} \dot{l}_s \quad (12)$$

进一步推导式 (12) 得出

$$\dot{\varepsilon}_v^p = bk^{\Delta_s-3} \frac{\partial k}{\partial N} \quad (13)$$

式中:

$$b = \frac{(3-M)(6+4M)}{(6+M)(3+M)p'} \Omega A \Delta_s \gamma_s \pi l_{s0}^{2-\Delta_s} \quad (14)$$

进一步联系式 (1)、(4), 并对比式 (13) 得出

$$k = \left[(\Delta_s - 2) N^\alpha / \alpha + 1 \right]^{1/(\Delta_s - 2)} \quad (15)$$

由式 (15) 可见, k 在加载初始加载过程中迅速增加, 然后趋于稳定, 表明剧烈的颗粒破碎发生在加载的初级阶段, 随着变形的稳定, 颗粒间的应力分配逐渐趋优, 破碎趋势最终趋缓乃至停止, 与 Indraratna 等^[7]和 Coop 等^[9]的试验结果一致。对于第一次加载, 将 $N = 1$ 代入式 (15) 可以得出分数阶数与分形维度之间的显示关系:

$$\alpha = (\Delta_s - 2) / (k_1^{\Delta_s-2} - 1) \quad (16)$$

3.3 参数分析

通过式 (14)、(16) 对分数阶应变率所涉及参数 b 、 α 进行分析。由式 (14) 可知, 参数 b 受土体的荷载 p' 、形状参数 γ_s 、摩擦系数 M 、分形维度 Δ_s 以及颗粒粒径 l_{s0} 影响, 易得 b 随着形状参数 γ_s 的增加而增加, 表明土体的变形能力随着颗粒越趋近于光滑球形而增加, 与 Cho 等^[21]的研究结果一致。此外, b 随着荷载 p' 的增加而减小, 表明围压越大, 试样越不容易变形, 与 Lackenby 等^[16]的试验结果 (见图 3) 一致。对于摩擦系数 M 、分形维度 Δ_s 和颗粒粒径 l_{s0} 影响, 如图 8、9 所示。从图 8 中可以看出, 随着试样强度 M 的增加, 参数 b 的数值变小, 表明强度高的土体抵抗变形的能力增加, 与肖杨等^[22]的试验结果一致。

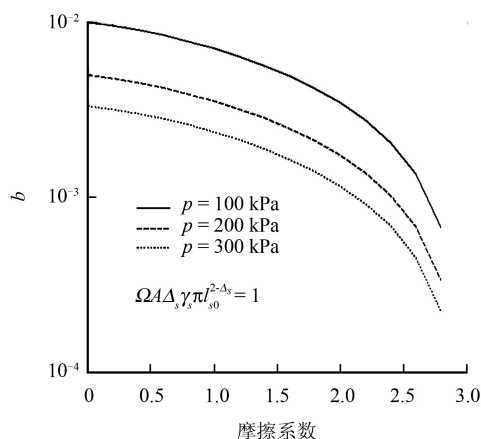


图 8 摩擦系数和荷载对参数 b 的影响
Fig.8 Effects of critical state friction parameter and stress on b

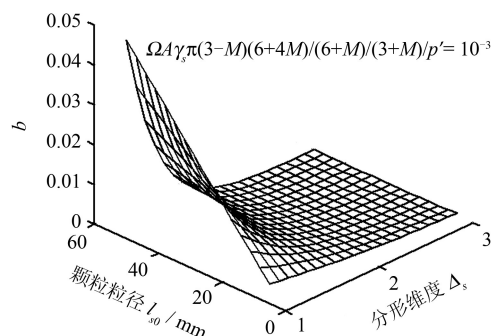


图 9 颗粒粒径和分形维度对参数 b 的影响
Fig.9 Effects of particle size and fractal dimension on b

分析图 9 发现, 随着试样内部颗粒分布分形维度的增加, 参数 b 迅速降低然后逐渐趋于稳定, 表明土体越趋向于分形分布, 其抵抗变形的能力越强。此外, 随着土体最小粒径的增加, b 逐渐减小, 表明试样中颗粒越大其抵抗变形的能力越大, 与图 6、7 中 Suiker 等^[17]和 Sevi 等^[18]的试验结果一致。

由式 (16) 可知, 粗粒土分数阶应变率的阶数 α 与土体的分形维度 Δ_s 以及颗粒破碎能力 k_1 有关。图 10 为分数阶数 α 随土颗粒分布的分形维度和颗粒破碎能力 k_1 的关系。

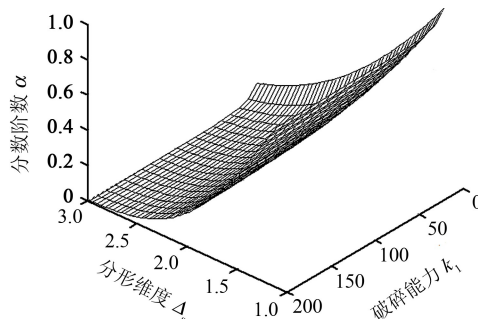


图 10 颗粒分形维度和破碎能力对分数阶数 α 的影响
Fig.10 Effects of fractal dimension and degradation rate on α

分析可知, 与参数 b 的变化规律类似, 分数阶数 α 随着土体颗粒分布的分形维度的增加而降低, 表明趋于分形分布 (不均匀系数 C_u 较大) 的土体抵抗进一步变形的能力较单一粒径分布的土体大, 与 Indraratna 等^[23]针对道砟的三轴排水试验结果一致, 因此, 工程中宜采用级配良好的粗粒土作为填料, 以增强其压实性和进一步抵抗变形的能力。此外, 对于同一种初始土样 (初始分形维度一致), 随着试样受荷压力的增加, 颗粒破碎能力的增加, 分数阶数 α 轻微降低。试样在不同加载条件下的分数阶应变率的阶数 α 应该有所不同, 但差别不大 (见图 10)。在建立粗粒土的分数阶塑性本构模型时为避免

模型的复杂性,其数值可以近似看作常数^[12]。

4 结 论

(1) 粗粒土在循环荷载下存在分数阶的应变率。分数阶应变率不同于传统的整数阶应变率,其在给定荷载条件下的应变率为常数,可以更容易的描述土体的受荷变形。当分数阶数 α 、参数 b 越大时试样的变形能力越强。

(2) α 受土体分形维度的影响,随着分形维度的增加 α 的数值变小,试样抵抗变形的能力增强。此外,其还受到试样内部颗粒破碎能力的影响,同样的初始试样在受荷增加时其破碎能力增加, α 相应变小,但变化幅度不大。建立土体的分数阶塑性动力本构模型时,为避免模型复杂化,可以视其为常数。

(3) 参数 b 随着试样内摩擦系数、荷载、以及最小粒径的增加而降低,试样相应抵抗变形的能力增强。此外, b 还随着土颗粒形状参数和粒径的增加而增加,表明土体的变形能力随着颗粒越趋近于光滑球体而增加。

需要指出的是,本文的研究是基于几种粗粒土在安定条件下的变形特性开展,研究结论是否适用于所有土体在非安定条件下的应力、应变特性,尚有待进一步研究。除此之外,目前建立的分数阶应变率与土颗粒分布分形维度之间的关系基于理论推导,其适用性有待于进一步试验验证。

致谢:衷心感谢河海大学工程力学系陈文教授和张晓棣博士对作者曾经的学术启发。

参 考 文 献

- [1] 陈生水 韩华强 傅华. 循环荷载下堆石料应力变形特性研究[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(8): 1151—1157.
CHEN Sheng-shui, HAN Hua-qiang, FU Hua. Stress and deformation behaviors of rockfill under cyclic loadings[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, 32(8): 1151—1157.
- [2] WANG Z, YANG Y, YU H S. Effects of principal stress rotation on the wave-seabed interactions[J]. *Acta Geotechnica*, 2016, 1—10.
- [3] 沈扬, 闫俊, 刘汉龙, 等. 主应力轴循环旋转下高密实粉土稳定性影响研究[J]. 岩土力学, 2011, 32(10): 2957—2964.
SHEN Yang, YAN Jun, LIU Han-long, et al. Stability of high relative density silt under cyclic principal stress axis rotation[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, 32(10): 2957—2964.
- [4] 陈生水, 彭成, 傅中志. 基于广义塑性理论的堆石料动力本构模型研究[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(11): 1961—1968.
CHEN Sheng-shui, PENG Cheng, FU Zhong-zhi. Dynamic constitutive model for rockfill materials based on generalized plasticity theory[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2012, 34(11): 1961—1968.
- [5] 王磊, 朱斌, 来向华. 砂土循环累积变形规律与显式计算模型研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(11): 2024—2029.
WANG Lei, ZHU Bing, LAI Xiang-hua. Cyclic accumulative deformation of sand and its explicit model[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, 37(11): 2024—2029.
- [6] SUN Y, XIAO Y, HANIF K F. Fractional order modelling of the cumulative deformation of granular soils under cyclic loading[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2015, 28(6): 647—658.
- [7] INDRARATNA B, SUN Y, NIMBALKAR S. Laboratory assessment of the role of particle size distribution on the deformation and degradation of ballast under cyclic loading[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2016, 142(7): 04016016.
- [8] 张季如, 胡泳, 张弼文, 等. 石英砂砾破碎过程中粒径分布的分形行为研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(5): 784—791.
ZHANG Ji-ru, HU Yong, ZHANG Bi-wen, et al. Fractal behavior of particle-size distribution during particle crushing of quartz sand and gravel[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, 37(5): 784—791.
- [9] 徐永福. 分形介质土力学理论[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(增刊 1): 16—20.
XU Yong-fu. Fractals in soil mechanics[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, 37(Suppl.1): 16—20.
- [10] YIN D, WU H, CHENG C, et al. Fractional order constitutive model of geomaterials under the condition of triaxial test[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2013, 37(8): 961—972.
- [11] 何明明, 李宁, 陈蕴生, 等. 基于分数阶微积分岩石的动态变形行为研究[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(增刊 1): 178—184.